Ma 3C

Extra uppgifter

på E- nivå

på kap. 3

Derivator

Använd deriveringsreglerna och derivera...

(sid. 130–134 i boken)

Uppg. 1	Lös nedanstående problem.
	a) Derivera $f(x) = 3x^4 - 4x + 3$
	b) Beräkna $f'(2)$
	c) Ange en annan funktion som har samma derivata som den givna funktionen. *Endast svar fordras.*

Lösning: 1a) $f(x) = 3x^4 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 4$

b) $f'(2) = 12 \cdot 2^3 - 4 = 12 \cdot 8 - 4 = 92$ $\qquad f'(2) = 92$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x + 1$

Derivera följande funktioner:

1) $y = 2x^4 - 5x$

2) $y = 5x + 3x^3 + 5$

3) $y = x^7 + x^5$

4) $y = 3x^2 - 9x^4$

5) $y = x + 4$

6) $y = x^3 + 4x^2 + 5x$

7) $y = 4 - x + x^2$

8) $y = 7x + 4x^2 - 3x$

9) $y = 8x^5 - 5x^2 + 4x^3 + 8$

10) $y = 0{,}2x^2 - 0{,}3x^{10}$

11) $y = x - 10x^2$

12) $y = 3 + 8x^2 - 2x - 15x^3$

Forts. →

13) $y = 7x^4 + 8x$

14) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^8}{2}$

15) $y = \dfrac{2x^3}{6} - \dfrac{x^{14}}{7}$

16) Bestäm $f'(2)$ då...

a) $f(x) = 4x^3 - 6x$

b) $f(x) = 3x^2 + x^4 - 45$

17) Bestäm $f'(5)$ då...

a) $f(x) = 5x^2 + 8$

b) $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 7x$

18) Bestäm $f'(-3)$ då...

a) $f(x) = 6x - 3x^3 + 2x^2$

b) $f(x) = 18 + 5x^5 - 6x^3 + x^2$

19) Ange en annan funktion som har samma derivata som den givna funktionen...

a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 8$

b) $y = x^4 + 5x^3 + 2x - 4$

20) Bestäm $f'(-1)$ då $f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}5$

Först förenkla, sen derivera...

(sid. 130–134 i boken)

Uppgg. 2	Bestäm $g'(x)$ då $g(x) = (4-x)(4+x)$

Lösning: 2) $g(x) = (4-x)(4+x) = 16 - x^2$

$g'(x) = -2x$

Derivera följande funktioner:

21) a) $y = x(x-3)$

b) $y = (3x-5)(x-8)$

22) a) $y = x^2(x^5 - x)$

b) $y = (x^3 + x^2)^2$

23) a) $y = \dfrac{3x^2 - 7x}{4}$

b) $y = \dfrac{x^3 - 3x^5}{3}$

24) a) $y = \dfrac{x - x^2}{2}$

b) $y = \dfrac{(x-9)^2}{5}$

Bestäm andraderivatan

(sid. 156 - 158 i boken)

Uppg. 3	Bestäm $f''(x)$ om $f(x) = 5x - 0,04x^3$

Lösning: 3) $f(x) = 5x - 0,04x^3$

$f'(x) = 5 - 0,04 \cdot 3x^2 = 5 - 0,12x^2$

$f''(x) = -0,24x$

25) Bestäm $f''(x)$ till funktionerna...

a) $f(x) = 5x^7 + 8x^6 - 3x^4$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x^5 + 9x$

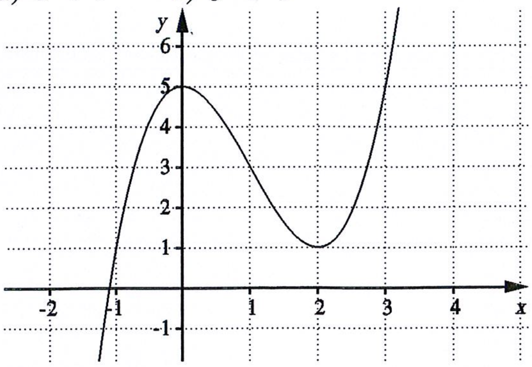
c) $f(x) = 4x + 12x^3 - 3x^5$

d) $f(x) = 10x^6 + 5x^4 - 2x^3 - x^2 + 8$

Att förstå grafer...

(s. 114 – 118 i boken)

Uppg. 4	Figuren nedan visar grafen till $y = f(x)$. Bestäm med hjälp av figuren. *Endast svar fordras.* a) $f(0)$ b) $f'(0)$



Lösning:

4) a) $f(0) = 5$

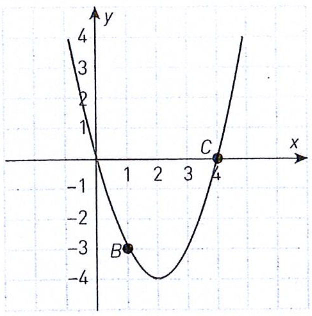
b) $f'(0) = 0$

26) Bilden visar grafen till $f(x) = x^2 - 4x$.

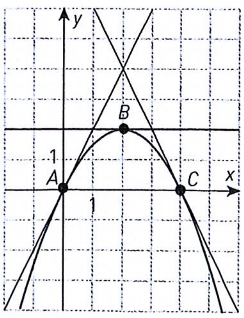
a) Beräkna $f'(2)$.

b) Beräkna derivatans värde i punkten B.

c) Beräkna kurvans lutning i punken C.



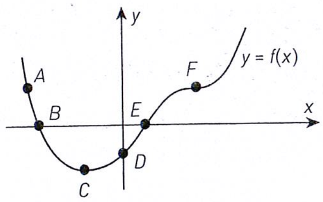
27) Figuren visar grafen till en funktion $f(x)$.



I punkterna A, B och C har kurvans tangenter ritats. Bestäm med hjälp av figuren

a) $f'(0)$ b) $f'(2)$ c) $f'(4)$

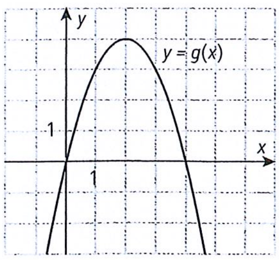
28) Grafen visar funktionen $y = f(x)$.



I vilken eller vilka av punkterna A–F gäller att:

a) $y = 0$ b) $y' = 0$ c) $y' < 0$

29) Lös följande uppgifter med hjälp av figuren.



a) Bestäm $g(1)$

b) Bestäm $g'(2)$

c) I vilket intervall är funktionen växande?

d) I vilket intervall är $g'(x) < 0$?

e) Lös ekvationen $g(x) = 0$.

Gränsvärden...

(s. 120–123 i boken)

Uppg. 5	Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{2x - 2x^3}{2x}$

Lösning

5) $\lim_{x \to 0} \frac{2x - 2x^3}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2x}(1 - x^2)}{\cancel{2x}} =$

$= \lim_{x \to 0} (1 - x^2) = 1$

Beräkna följande gränsvärden:

30) $\lim_{x \to 0} \frac{5x + x^2}{x}$

31) $\lim_{x \to 0} \frac{3x - 9x^2}{x}$

32) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

33) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

34) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x}$

35) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

36) $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

Tolka derivata... (s. 138 i boken)

Uppg. 6	Antalet bakterier i en bakteriekultur är $N(t) = 2000 - t + 2t^3$, där t = antalet minuter efter försökets början. Beräkna (med två gällande siffror) och förklara innebörden av: a) $N(15)$ b) $N'(15)$

Lösning: 6) a) $N(t) = 2000 - t + 2t^3$

$N(15) = 2000 - 15 + 2 \cdot 15^3 = 8735$

Svar: $N(15) = 8735$.

Efter 15 minuter är antalet bakterier 8735 stycken.

b) $N'(t) = -1 + 6t^2$

$N'(15) = -1 + 6 \cdot 15^2 = 1349$

Svar: $N'(15) = 1349$

Precis 15 minuter efter start ökar bakterierna med 1349 st/minut.

37) En bakteriekultur sprayas med ett bakteriedödande medel. Efter t min är antalet bakterier $N(t)$. Vad betyder det uttryckt i ord att

$N(10) = 2{,}7 \cdot 10^{13}$ och $N'(10) = -5{,}4 \cdot 10^{12}$?

38) En kropp som faller fritt har efter t s fallit $f(t)$ m. Vad betyder det att

a) $f(4) = 78$ b) $f'(4) = 40$?

39) Det kostar $f(x)$ kr att producera x enheter av en vara. Vad betyder det att

a) $f(100) = 50\,000$ b) $f'(100) = 60$?

40) Temperaturen i en varmvattenberedare är $f(t)$ °C, där t är tiden i timmar räknat från kl 00.00. Vad betyder det att

a) $f(2) = 60$ b) $f'(5) = -1{,}0$?

41) Man tömmer vatten ur en tank.
Efter t minuter återstår $s(t)$ liter.
Tolka följande påståenden.

a) $s(0) = 250$

b) $s(5) = 200$

c) $s'(10) = -5$

42) Temperaturen i en ugn är $g(t)$ grader vid tiden t minuter efter klockan 12.00.
Förklara vad följande betyder.

a) $g(10) = 45$

b) $g'(10) = 5$

c) $g'(30) = -3$

43) Med funktionen $N(t)$ kan antalet invånare i en kommun t år efter år 2007 bestämmas. Vad betyder $N(4) = 32\,000$ och $N'(4) = -130$?

Bestämma extrempunkter och rita grafer...

(s. 140 – 146
o 156 – 158
i boken)

Uppg. 7	Ange med hjälp av derivatan eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter (både x- och y-koordinaten) till funktionen $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

Lösn.

7) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

$f'(x) = 6x^2 + 6x$

Hitta extrem-punkter

$f'(x) = 0$ ger: $0 = 6x^2 + 6x$

$0 = 6x(x+1)$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = -1$

Bestämma om extrempkterna är max, min och/el. terrassp.

$f''(x) = 12x + 6$

$x = 0$ ger $f''(0) = 6 \Rightarrow$ Minimipunkt
(när $y'' > 0$)

$x = -1$ ger $f''(-1) = 12 \cdot (-1) + 6 = -6 \Rightarrow$ Maximipunkt
(när $y'' < 0$)

Bestämmer y-koordinaterna

$x = 0$ ger $f(0) = 1$

$x = -1$ ger $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$

Svar: Minimipunkt i (0, 1) och
Maximipunkt i (−1, 2).

Bestäm eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter till funktionerna. Funktionsgraferna ska ej ritas.

44) a) $y = 4x - x^2$ $\quad$ b) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

45 a) $y = 3x - x^3 - 2$ $\quad$ b) $y = x^3 + 2$

46) Du har funktionen $y = x^3 - 12x$

a) Bestäm nollställena till y'.

b) Ange extrempunkternas koordinater.

c) Bestäm tecknet för y' till vänster och till höger om nollställena.

d) Avgör om extrempunkterna är maximi- eller minimipunkter.

47) Följande kurvor har två extrempunkter. Bestäm deras koordinater och avgör om de är maximi- eller minimipunkter.

a) $y = 27x - x^3$

b) $y = 2x^3 - 3x^2$

48) Bestäm extrempunktens koordinater med hjälp av derivata och rita sedan kurvan till

a) $y = x^2 + 2x - 5$

b) $y = 1 - 6x - 2x^2$

49) Rita kurvorna med hjälp av derivata

a) $y = x^3 - 6x^2$

b) $y = 9x^2 - 3x^3 + 1$

50) Bestäm extrempunktens koordinater med hjälp av derivata och avgör om det är en maximi- eller minimipunkt.

a) $y = 10x - x^2 - 22$

b) $y = 4x^2 + 16x + 11$

c) $y = 10x + x^2 - 22$

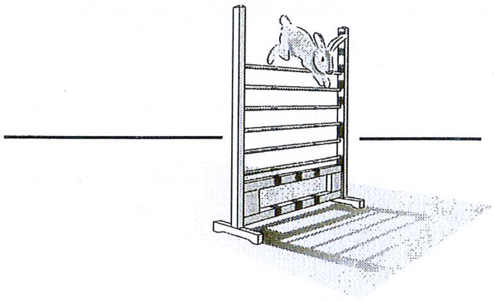
d) $y = 0{,}8x - 1{,}6x^2 - 2{,}1$

51) Beskriv steg för steg hur du gör för att bestämma *extrempunkterna* till kurvan $y = f(x)$.

52) Bestäm med hjälp av derivata de lokala extrempunkterna på kurvan $y = x^3 - 3x$. Rita kurvan.

Max- och minproblem

(sid. 159 – 161 i boken)

Uppg. 8	Kaninen Tösen från Danmark satte 1997 världsrekord i höjdhopp för kaniner. Enligt en modell gäller att Tösens höjd under hoppet ges av $h(x) = 4x - 4x^2$, där h är höjden i meter över golvet och där x är avståndet i meter längs golvet från avstampet. Beräkna med hjälp av derivata Tösens maximala hopphöjd. 

Lösning: 8)

$$h(x) = 4x - 4x^2$$

Extremp.: $h'(x) = 4 - 8x$

$h'(x) = 0$ ger: $0 = 4 - 8x$

$8x = 4$

$x = 4/8 = 0{,}5$

Kollar vad extrempunkten är: $h''(x) = -8 \Rightarrow$ Maximum (när $h'' < 0$)

Max.hoppet blir: $h(0{,}5) = 4 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 0{,}5^2 = 2 - 1 = 1$

Svar: 1 m

53) En misslyckad raketuppskjutning från ett fartyg kan beskrivas med ekvationen

$y = -4{,}8t^2 + 9{,}6t + 38{,}2$

där y m är raketens höjd över havet t sekunder efter avfyrningen. Hur högt når raketen?

54) En förening försöker beräkna intäkterna y kr från en kommande nyårsrevy. Tidigare erfarenheter visar att formeln

$$y = 1000x - 5x^2$$

där x kr är biljettpriset, bör kunna användas. Vilket biljettpris ger maximal intäkt?

55) Ett straffkast i basket följer ekvationen

$$y = 2{,}15 + 2{,}1x - 0{,}41x^2$$

där y m är bollens höjd över golvet och x m är avståndet från utkastet räknat längs golvet. Hur högt når bollen?

56) Enligt en enkel modell för befolkningsutvecklingen i Sverige under åren 2000 till 2050 kan folkmängden y miljoner uppskattas med formeln

$$y = -0{,}000\,338x^2 + 0{,}0232x + 8{,}89$$

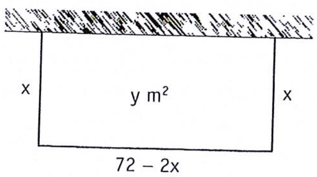
där x är tiden i år räknat från 2000. Vilket är enligt modellen det största värdet på Sveriges folkmängd under denna period?

57) Under en oktoberdag varierade temperaturen y °C enligt ekvationen

$$y = 0{,}5t^2 - 5t + 10, \quad 0 \le t \le 12,$$

där t är antalet timmar räknat från midnatt. Vilken var den lägsta temperaturen under dessa 12 timmar och när inträffade den?

58) Figuren visar en rektangulär inhägnad med ett 72 m långt stängsel.



a) Bestäm y som funktion av x.

b) Ange funktionens definitionsmängd.

c) För vilket x-värde är inhägnadens area så stor som möjligt?

59) En boll kastas rakt upp i luften. Höjden y m över marken beskrivs av funktionen

$$y = 2 + 20x - 5x^2$$

där x är tiden i sekunder. Hur högt når bollen?

60) Christian studerade en sommar tillväxthastigheten y cm/dygn för en solros och fann att den följde en enkel andragradsmodell

$$y = 0{,}00035x(260 - x)$$

där x är solrosens höjd i centimeter. Bestäm den största tillväxthastigheten. Hur lång är solrosen då?

FACIT

1) $y' = 8x^3 - 5$

2) $y' = 5 + 9x^2$

3) $y' = 7x^6 + 5x^4$

4) $y' = 6x - 36x^3$

5) $y' = 1$

6) $y' = 3x^2 + 8x + 5$

7) $y' = -1 + 2x$

8) $y' = 7 + 8x - 3 = 4 + 8x$

9) $y' = 40x^4 - 10x + 12x^2$

10) $y' = 0{,}4x - 3x^9$

11) $y' = 1 - 20x$

12) $y' = 16x - 2 - 45x^2$

13) $y' = 28x^3 + 8$

14) $y' = x^2 + 4x^7$

15) $y' = x^2 - 2x^{13}$

16a) $f'(2) = 42$

b) $f'(2) = -1$

17)a) $f'(5) = 50$

b) $f'(5) = 11027$

18a) $f'(-3) = -87$

b) $f'(-3) = 1857$

19a) T.ex. $f(x) = 2x^3 - 5x - 10$

OBS! Man byter bara ut konstanttermen

b) T.ex. $y = x^4 + 5 \cdot x^3 + 2x - 12$

20) $f'(-1) = -0{,}3$

21) a) $y' = 2x - 3$
b) $y' = 6x - 29$

22) a) $y' = 7x^6 - 3x^2$
b) $y' = 6x^5 + 10x^4 + 4x^3$

23) a) $y' = \frac{6x-7}{4} = 1{,}5x - 1{,}75$
b) $y' = x^2 - 5x^4$

24) a) $y' = 0{,}5 - x$
b) $y' = \frac{2x-18}{5}$

25 a)
b)
c)
d)

26) a) 0 b) $f'(1) = -2$
c) $k = f'(4) = 4$

27) a) 2 b) 0
c) −2

28) a) B och E b) C och F
c) A och B

29) a) $g(1) = 3$ b) $g'(2) = 0$
c) Växande för $x \leq 2$
d) $g'(x) < 0$ för $x > 2$
e) $x = 0$ eller $x = 4$

30) 5

31) 1

32) −4

33) 2

34) −1

35) 0,25

36) −10

37)

$N(10) = 2{,}7 \cdot 10^{13}$ betyder att vid $t = 10$, dvs efter 10 min är antalet bakterier $2{,}7 \cdot 10^{13}$

$N'(10) = -5{,}4 \cdot 10^{12}$ betyder att vid $t = 10$, dvs efter 10 min minskar antalet bakterier med $5{,}4 \cdot 10^{12}$ bakterier per minut.

38) a) Efter 4 s har kroppen fallit 78 m
b) Efter 4 s är kroppens hastighet 40 m/s

39) a) Det kostar 50 000 kr att producera 100 enheter.
b) Det kostar 60 kr att producera den hundrade enheten (marginalkostnaden för $x = 100$ är 60 kr/enhet).

40) a) Kl 02.00 är temperaturen 60 °C
b) Kl 05.00 sjunker temperaturen med 1 °C/h

41) a) Från början är det 250 liter i tanken.
b) Efter 5 minuter är det 200 liter i tanken.
c) Efter 10 minuter minskar vattenmängden med 5 liter/minut.

42) a) Klockan 12.10 är temperaturen 45 grader.
b) Klockan 12.10 ökar temperaturen med 5 grader/minut.
c) Klockan 12.30 minskar temperaturen med 3 grader/minut.

43) År 2011 är befolkningen 32 000 personer. Detta år har befolkningen minskat med 130 personer, dvs befolkningsminskningen är 130 personer/år.

44) a) Maximipunkt: (2, 4)
b) Minimipunkt: (−3, −4,5)

45) a) Minimipunkt: (−1, −4)
Maximipunkt: (1, 0)
b) Terrasspunkt: (0, 2)

46)

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
b) $(-2, 16)$, $(2, -16)$
c)

y'	+	0	−	0	+
x		−2		2	

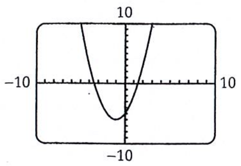
d) $(-2, 16)$ maximipunkt
$(2, -16)$ minimipunkt

47)

a) $(-3, -54)$ minimipunkt
$(3, 54)$ maximipunkt
b) $(0, 0)$ maximipunkt
$(1, -1)$ minimipunkt

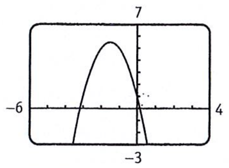
48)

a)



$(-1, -6)$ minimipunkt

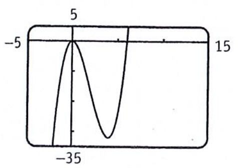
b)



$(-1{,}5;\ 5{,}5)$ maximipunkt

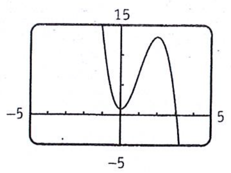
49)

a)



Maximipunkt $(0, 0)$
Minimipunkt $(4, -32)$

b)



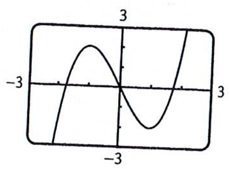
Minimipunkt $(0, 1)$
Maximipunkt $(2, 13)$

50)

a) $(5, 3)$ maximipunkt
b) $(-2, -5)$ minimipunkt
c) $(-5, -47)$ minimipunkt
d) $(0{,}25; -2)$ maximipunkt

51) Se "receptet" på repetitionen.

52)



Maximipunkt: $(-1, 2)$
Minimipunkt: $(1, -2)$

53) 43 m (för $t = 1$)

54) 100 kr

55) 4,84 m

56) 9,29 miljoner
($x = 34{,}319526\ldots$ ger $y = 9{,}288106\ldots$)

57) −2,5 °C kl. 5.00

58) a) $y = 72x - 2x^2$
b) $0 < x < 36$
c) $x = 18$

59) 22 m

60) 5,9 cm/dygn (5,915)
Solrosen är då 130 cm lång.